

# TEOREMA PAPPUS PADA ELIPS, PARABOLA DAN HIPERBOLA

Ardiansyah Yan Hakim Nst.<sup>1\*</sup>, Sri Gemawati<sup>2</sup>, Musraini M.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Mahasiswa Program S1 Matematika

<sup>2</sup>Dosen Jurusan Matematika

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Univeritas Riau  
Kampus Bina Widya 28293 Indonesia

\*ardiinasution@gmail.com

## ABSTRACT

Pappus theorem is a theorem that shows collinearity of three points. The three points are the result of intersection lines that connects any six points. Any six points are divided into three points on a straight line and three points on another straight line. This paper shows that Pappus theorem is valid at a conic section (ellips, parabola and hyperbola). The properties of *cross ratio* are utilized to prove the validity of Pappus at the conic section.

Keywords: *cross ratio, ellips, hyperbola, parabola, pappus theorem,*.

## ABSTRAK

Teorema Pappus merupakan teorema yang menunjukkan kolinieritas dari tiga titik. Tiga titik tersebut dihasilkan dari perpotongan-perpotongan garis yang menghubungkan enam titik sebarang, yang dibagi menjadi tiga titik sebarang pada sebuah garis lurus dan tiga titik sebarang pada garis lurus lainnya. Dalam tulisan ini ditunjukkan bahwa Teorema Pappus berlaku pada irisan kerucut (elips, parabola dan hiperbola). Pembuktian Teorema Pappus pada irisan kerucut dengan menggunakan sifat dan teorema pada *cross ratio*.

Kata kunci: *cross ratio, elips, hiperbola, parabola, teorema pappus.*

## 1. PENDAHULUAN

Teorema Pappus merupakan teorema yang menunjukkan kolinieritas dari tiga titik. Tiga titik tersebut dihasilkan dari perpotongan-perpotongan garis yang menghubungkan enam titik sebarang, yaitu tiga titik sebarang pada sebuah garis lurus dengan tiga titik sebarang pada garis lurus lainnya [3].

Selain pada dua buah garis lurus, Teorema Pappus juga berlaku pada lingkaran seperti yang sudah dijelaskan pada [3]. Dengan keenam titik sebarang tersebut berada pada sisi lingkaran.

Bentuk dari irisan kerucut antara lain adalah lingkaran, elips, parabola dan hiperbola. Pembuktian Teorema Pappus pada elips, parabola dan hiperbola telah dijelaskan secara umum pada [4] dan [5]. Pada tulisan ini dijelaskan pembuktian Teorema Pappus pada elips, parabola dan hiperbola dengan lebih terperinci.

## 2. TEOREMA PAPPUS, *CROSS RATIO* DAN TEOREMA MENELAUS

Pappus adalah seorang matematikawan Yunani yang berasal dari kota Alexandria. Salah satu karyanya dibidang geometri proyeksi ditulis dalam buku yang berjudul *Mathematicae Collectiones* yang dikenal dengan Teorema Pappus [3].

Teorema 1 (Teorema Pappus) Diberikan tiga titik  $A, B$  dan  $C$  pada garis lurus dan diberikan  $X, Y$  dan  $Z$  adalah tiga titik pada garis lain. Jika garis  $AY, BZ$  dan  $CX$  masing-masing memotong garis-garis  $BX, CY$  dan  $AZ$  maka ketiga titik perpotongannya yang dimisalkan dengan titik  $K, L$  dan  $M$  adalah segaris.

Bukti: Dapat dilihat pada [3]. ■

Berikut beberapa definisi dan teorema tentang *cross ratio* yang dikutip dari [2], [4] dan [5].

Definisi 1 Susunan dari titik-titik pada sebuah garis lurus disebut barisan.

Definisi 2 Jika  $A, B, C, D$  adalah titik-titik pada sebuah garis maka  $(ABCD)$  disebut *cross ratio* dari barisan  $A, B, C, D$ , yang nilainya adalah

$$(ABCD) = \frac{AC}{CB} \cdot \frac{DB}{AD}.$$

Definisi 3 Susunan dari garis-garis yang melewati sebuah titik disebut berkas garis.

Definisi 4 Jika  $OA, OB, OC, OD$  adalah berkas garis dari sebuah titik, *cross ratio* dari berkas garis tersebut adalah  $O(ABCD)$ , yang nilainya adalah

$$O(ABCD) = \frac{\sin AOC}{\sin COB} \cdot \frac{\sin DOB}{\sin AOD}.$$

Teorema 2 *Cross ratio* dari berkas garis sama dengan nilai *cross ratio* dari barisan titik yang memotong berkas garis tersebut.

Bukti: Dapat dilihat pada [2]. ■

Teorema 3 Jika dua buah berkas garis bertemu pada barisan titik yang sama maka *cross ratio* dari berkas-berkas garis tersebut adalah sama.

Bukti: Dapat dilihat pada [2]. ■

Teorema 5 (Chasles' Theorem) Diberikan sebarang empat titik pada irisan kerucut, nilai *cross ratio* dari berkas garis yang melewati titik titik tersebut adalah sama pada sebarang titik asal yang di ambil pada irisan kerucut yang sama

Bukti: Dapat dilihat pada [4]. ■

Selanjutnya dijelaskan Teorema Menelaus dan Teorema Transversal Menelaus yang digunakan untuk membuktikan Teorema Pappus pada Parabola dan Hiperbola dengan variasi tiga titik perpotongan yang berbeda [3].

Teorema 6 (Teorema Menelaus) Diberikan sebuah  $\Delta ABC$ . Misalkan titik  $D$  dan  $E$  terletak masing-masing pada sisi  $AB$  dan  $AC$ . Misalkan pula titik  $F$  terletak pada perpanjangan garis dari  $BC$ . Titik  $D$ ,  $E$ , dan  $F$  adalah segaris jika dan hanya jika

$$\frac{AE}{EC} \frac{CF}{FB} \frac{BD}{DA} = -1.$$

Bukti: Dapat dilihat pada [3]. ■

Teorema 7 (Teorema Transversal Menelaus) Diberikan  $\Delta ABC$ , titik  $D$ ,  $E$ , dan  $F$  berada pada perpanjangan sisi  $BC$ ,  $AC$ , dan  $AB$ . Titik  $D$ ,  $E$ , dan  $F$  adalah segaris jika dan hanya jika

$$\frac{AF}{FB} \frac{BD}{DC} \frac{CE}{EA} = -1.$$

Bukti: Dapat dilihat pada [3]. ■

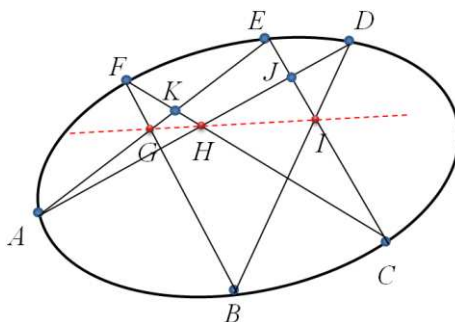
### 3. TEOREMA PAPPUS PADA ELIPS, PARABOLA DAN HIPERBOLA

Pada [4] dan [5] menyatakan bahwa irisan kerucut berbentuk elips, parabola dan hiperbola merupakan bentuk-bentuk proyeksi dari lingkaran. Setelah diproyeksikan, elips merupakan lingkaran yang tidak berhubungan dengan garis di tak hingga, parabola merupakan lingkaran yang mempunyai satu titik singgung di tak hingga, sedangkan hiperbola setelah diproyeksikan merupakan lingkaran yang mempunyai dua titik perpotongan di tak hingga.

Pada [2], [4] dan [5] dijelaskan bahwa nilai dari *cross ratio* akan tetap sama walaupun setelah diproyeksikan. Barisan dari titik-titik memiliki nilai *cross ratio* yang sama dengan proyeksinya dan berkas garis memiliki nilai *cross ratio* yang sama dengan berkas garis proyeksinya. Berikut bentuk teorema pertama pada elips.

Teorema 8 Sebarang titik  $A, B, C, D, E$  dan  $F$  berurutan pada elips. Misalkan  $G = AE \cap BF$ ,  $H = AD \cap CF$  dan  $I = BD \cap CE$ . Titik  $G, H$  dan  $I$  adalah segaris.

Bukti: Misalkan  $K = AE \cap CF$  dan  $J = AD \cap CE$  seperti pada Gambar 1.



Gambar 1: Teorema Pappus pada elips serta titik  $J$  dan  $K$ .

Pada Gambar 1, berkas garis  $H(CIJE)$  dan  $D(CIJE)$  sama-sama menghadap barisan titik  $C, I, J, E$  berdasarkan Teorema 3 diperoleh

$$H(CIJE) = D(CIJE).$$

Barisan titik  $C, I, J, E$  merupakan barisan titik yang memotong berkas garis  $D(CBAE)$ , dari Teorema 2 diperoleh

$$D(CIJE) = D(CBAE).$$

Dari titik  $F$  dihubungkan ke barisan titik  $C, B, A, E$  sehingga membentuk berkas garis  $F(CBAE)$ . Berkas garis  $F(CBAE)$  dan  $D(CBAE)$  sama-sama menghadap barisan titik  $C, B, A, E$ . Dari Teorema 3 diperoleh persamaan

$$D(CBAE) = F(CBAE).$$

Berkas garis  $F(CBAE)$  dipotong oleh barisan titik  $K, G, A, E$  sehingga dari Teorema 2 diperoleh

$$F(CBAE) = F(KGAE).$$

Berkas garis  $F(KGAE)$  dan  $H(KGAE)$  sama-sama menghadap barisan titik  $K, G, A, E$  dari Teorema 3 diperoleh

$$F(KGAE) = H(KGAE),$$

sehingga diperoleh

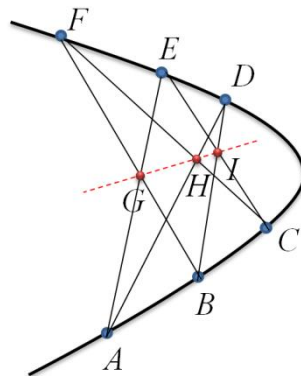
$$H(CIJE) = H(KGAE).$$

Barisan  $C, I, J, E$  pada berkas  $H(CIJE)$  dan barisan  $K, G, A, E$  pada berkas  $H(KGAE)$  sama-sama memiliki titik  $E$ . Dari Gambar 1 garis  $CK$  dan  $AJ$  berpotongan di titik  $H$ , maka berdasarkan Teorema 4, garis  $GI$  juga harus melewati titik  $H$ . Sehingga terbukti  $G, H$  dan  $I$  segaris. ■

Dengan cara yang sama seperti pada elips, membuktikan Teorema Pappus pada parabola dan hiperbola juga dengan menggunakan *cross ratio*. Berikut ini Teorema Pappus pada parabola dan hiperbola pada Teorema 8 dan Teorema 9.

Teorema 9 Diberikan sebuah parabola, sebarang titik  $A, B, C, D, E$  dan  $F$  berurutan pada parabola. Misalkan  $G = AE \cap BF$ ,  $H = AD \cap CF$  dan  $I = BD \cap CE$ . Titik  $G, H$  dan  $I$  adalah segaris.

Berikut diberikan Gambar 2 untuk mengilustrasikan Teorema 9.

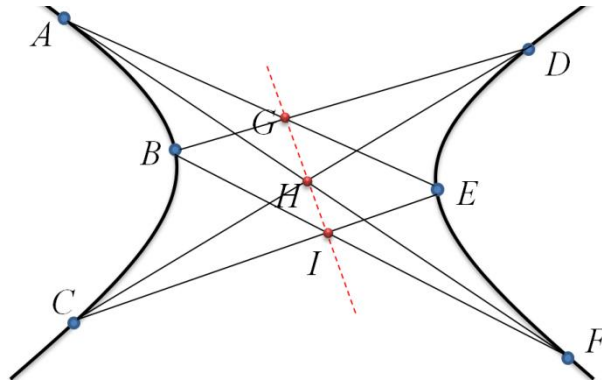


Gambar 2: Teorema Pappus pada parabola.

Bukti: Sama seperti pembuktian pada Teorema 8. ■

Teorema 10 Sebarang titik  $A, B$  dan  $C$  berada pada sisi kiri hiperbola dan titik  $D, E$  dan  $F$  berada pada sisi kanan hiperbola. Misalkan  $G = AE \cap BD$ ,  $H = AF \cap CD$  dan  $I = BF \cap CE$ . Titik  $G, H$  dan  $I$  adalah segaris.

Berikut diberikan Gambar 3 untuk mengilustrasikan Teorema 10.

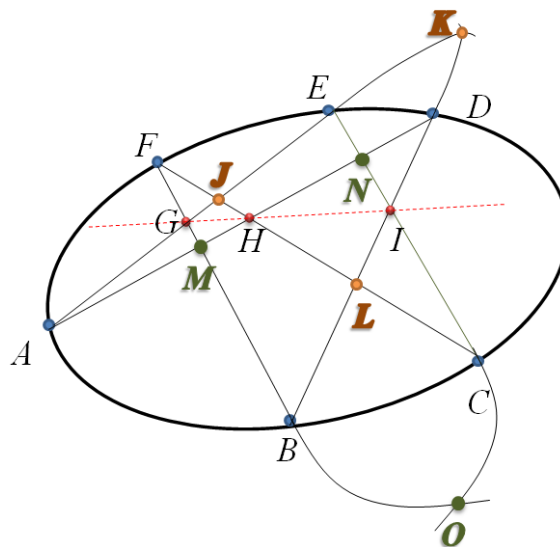


Gambar 3: Teorema Pappus pada hiperbola.

Bukti: Sama seperti pembuktian pada Teorema 8. ■

#### 4. BENTUK LAIN DARI TEOREMA PAPPUS PADA ELIPS, PARABOLA DAN HIPERBOLA

Pada bagian ini ditunjukkan bentuk lain dari Teorema Pappus pada irisan kerucut yang diakibatkan variasi dari penghubungan enam titik awal pada irisan kerucut yang berbeda dari Teorema 8, Teorema 9 dan Teorema 10. Sebelumnya pada Teorema Pappus, selain perpotongan pada titik  $G, H$  dan  $I$  juga terdapat enam titik perpotongan lain yang dihasilkan dari perpotongan garis tersebut. Enam titik ini membentuk dua buah segitiga, begitu juga Teorema Pappus pada irisan kerucut seperti yang dilukiskan pada Gambar 4 yaitu titik sudut  $\triangle JKL$  dan  $\triangle MNO$  sebagai berikut.



Gambar 4: Titik  $G, H$  dan  $I$  serta enam titik pada titik sudut  $\triangle JKL$  dan  $\triangle MNO$ .

Berdasarkan Teorema Menelaus dan Teorema Transversal Menelaus pada  $\Delta JKL$ , dengan garis  $GI, AD, BF$  dan  $CE$  berurutan sebagai transversalnya diperoleh persamaan-persamaan berikut

$$\frac{KG}{GJ} \frac{JH}{HL} \frac{LI}{IK} = -1, \quad (1)$$

$$\frac{KA}{AJ} \frac{JH}{HL} \frac{LD}{DK} = -1, \quad (2)$$

$$\frac{KG}{GJ} \frac{JF}{FL} \frac{LB}{BK} = -1, \quad (3)$$

$$\frac{KE}{EJ} \frac{JC}{CL} \frac{LI}{IK} = -1. \quad (4)$$

Dengan mengalikan persamaan (2), (3) dan (4), diperoleh

$$\frac{KG}{GJ} \frac{JH}{HL} \frac{LI}{IK} \frac{KA}{AJ} \frac{LD}{DK} \frac{JF}{FL} \frac{LB}{BK} \frac{KE}{EJ} \frac{JC}{CL} = -1. \quad (5)$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (1) ke persamaan (5), diperoleh

$$\frac{KA}{KB} \frac{KE}{KD} \frac{LB}{LC} \frac{LD}{LF} \frac{JC}{JA} \frac{JF}{JE} = 1. \quad (6)$$

Dengan cara yang sama pada  $\Delta JKL$ , berdasarkan Teorema Menelaus dan Teorema Transversal Menelaus pada  $\Delta MNO$  dengan garis  $GI, AE, BD$  dan  $CF$  berurutan sebagai transversalnya diperoleh persamaan-persamaan berikut

$$\frac{MG}{GO} \frac{OI}{IN} \frac{NH}{HM} = -1, \quad (7)$$

$$\frac{MG}{GO} \frac{OE}{EN} \frac{NA}{AM} = -1, \quad (8)$$

$$\frac{MB}{BO} \frac{OI}{IN} \frac{ND}{DM} = -1, \quad (9)$$

$$\frac{MF}{FO} \frac{OC}{CN} \frac{NH}{HM} = -1. \quad (10)$$

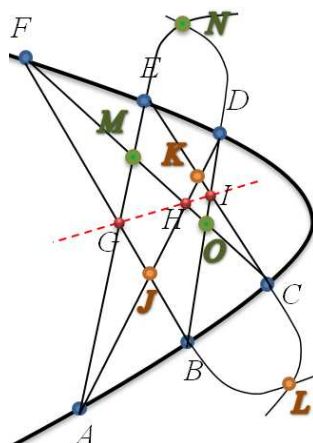
Dengan mengalikan persamaan (8), (9) dan (10), diperoleh

$$\frac{MG}{GO} \frac{OI}{IN} \frac{NH}{HM} \frac{OE}{EN} \frac{NA}{AM} \frac{MB}{BO} \frac{ND}{DM} \frac{MF}{FO} \frac{OC}{CN} = -1. \quad (11)$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (7) ke persamaan (11), diperoleh

$$\frac{MB}{MA} \frac{MF}{MD} \frac{NA}{NC} \frac{ND}{NE} \frac{OC}{OB} \frac{OE}{OF} = 1. \quad (12)$$

Untuk enam titik perpotongan pada parabola selain titik  $G, H$  dan  $I$  dapat dilukiskan pada Gambar 5 sebagai berikut.



Gambar 5: Titik  $G, H$  dan  $I$  serta enam titik pada titik sudut  $\Delta JKL$  dan  $\Delta MNO$ .

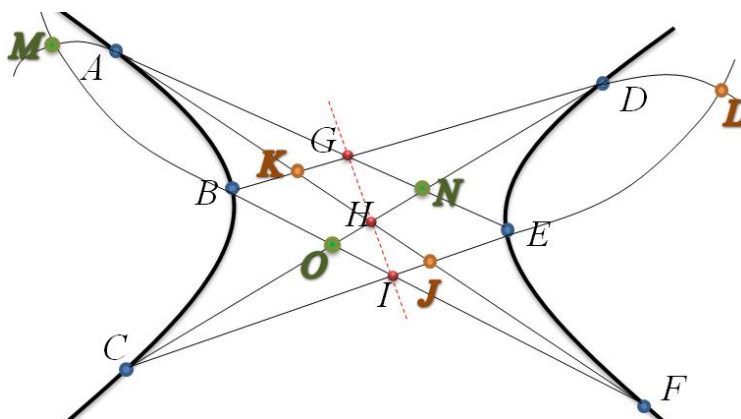
Pada Gambar 5 titik sudut  $\Delta JKL$  dan  $\Delta MNO$  merupakan enam titik perpotongan pada parabola selain titik  $G, H$  dan  $I$ . Dengan cara yang sama seperti  $\Delta JKL$  dan  $\Delta MNO$  pada elips, dari  $\Delta JKL$  pada parabola diperoleh persamaan

$$\frac{KA}{KC} \frac{KD}{KE} \frac{LC}{LB} \frac{LE}{LF} \frac{JB}{JA} \frac{JF}{JD} = 1, \quad (13)$$

dan dari  $\Delta MNO$  diperoleh persamaan

$$\frac{MA}{MC} \frac{ME}{MF} \frac{OC}{OB} \frac{OF}{OD} \frac{NB}{NA} \frac{ND}{NE} = 1. \quad (14)$$

Untuk Teorema Pappus pada hiperbola, enam titik perpotongan selain titik  $G, H$  dan  $I$  dilukiskan pada Gambar 6 berikut.



Gambar 6: Titik  $G, H$  dan  $I$  dan enam titik pada  $\Delta JKL$  dan  $\Delta MNO$ .

Pada Gambar 6 titik sudut  $\Delta JKL$  dan  $\Delta MNO$  merupakan enam titik perpotongan pada parabola selain titik  $G, H$  dan  $I$ . Dari  $\Delta JKL$  pada hiperbola diperoleh persamaan

$$\frac{KA}{KB} \frac{KF}{KD} \frac{LB}{LC} \frac{LD}{LE} \frac{JC}{JA} \frac{JE}{JF} = 1, \quad (15)$$

dan dari  $\Delta MNO$  diperoleh persamaan

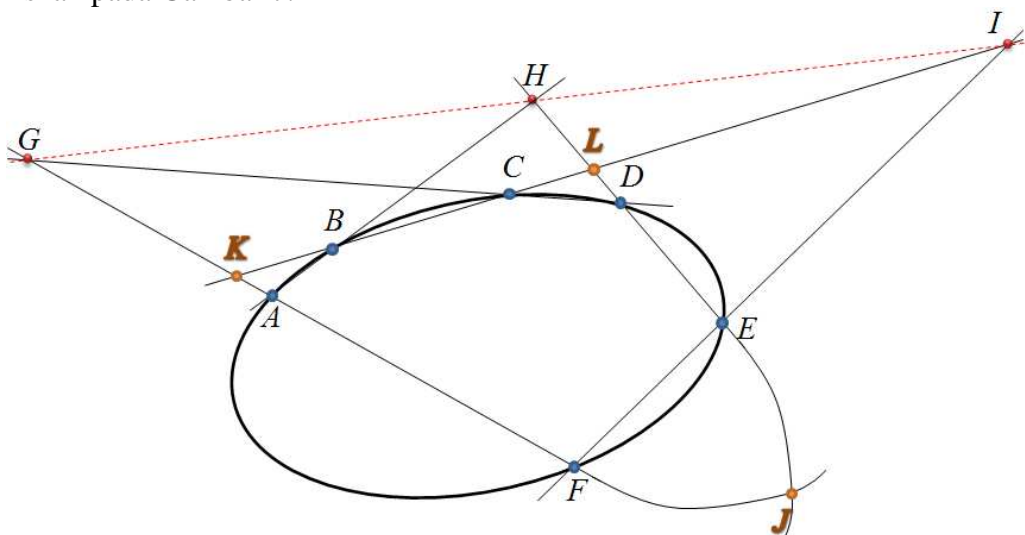
$$\frac{MA}{MB} \frac{ME}{MF} \frac{OB}{OC} \frac{OF}{OD} \frac{NC}{NA} \frac{ND}{NE} = 1. \quad (16)$$

Persamaan (6), (12), (13), (14), (15) dan (16) menunjukkan bahwa dari segitiga yang diperoleh dari perpotongan-perpotongan garis Teorema Pappus pada irisan kerucut mempunyai perbandingan segmen garis yang sama pada garis-garis yang menyusun titik sudut segitiga tersebut.

Berikut ini dijelaskan Teorema Pappus pada elips dengan bentuk perpotongan yang berbeda dari Teorema 8. Perpotongan titik  $G, H$  dan  $I$  yang dihasilkan berada di wilayah luar dari elips.

**Teorema 12** Diberikan sebuah elips. Sebarang titik  $A, B, C, D, E$  dan  $F$  berurutan pada elips. Misalkan  $G = AF \cap CD$ ,  $H = AB \cap DE$  dan  $I = BC \cap EF$ . Titik  $G, H$  dan  $I$  adalah segaris.

**Bukti:** Misalkan  $J = AF \cap DE$ ,  $K = AF \cap BD$  dan  $L = BC \cap DE$  seperti yang dilukiskan pada Gambar 7.



Gambar 7: Titik  $J, K$  dan  $L$  pada perpotongan garis membentuk  $\Delta JKL$ .

Pada Gambar 7, titik sudut  $\Delta JKL$  berada pada perpotongan garis-garis yang menghubungkan enam titik sebarang pada irisan kerucut sehingga dari pembahasan sebelumnya, diperoleh persamaan

$$\frac{JA}{JD} \frac{JF}{JE} \frac{LD}{LE} \frac{KB}{LC} \frac{KC}{KA} \frac{KF}{KF} = 1. \quad (17)$$



Berdasarkan Teorema Menelaus dan Teorema Transversal Menelaus pada  $\Delta JKL$  dengan garis  $AB$ ,  $CD$  dan  $EF$  berurutan sebagai transversalnya diperoleh persamaan-persamaan berikut

$$\frac{KA}{AJ} \frac{JH}{HL} \frac{LB}{BK} = -1, \quad (18)$$

$$\frac{KG}{GJ} \frac{JD}{DL} \frac{LC}{CK} = -1, \quad (19)$$

$$\frac{KF}{FJ} \frac{JE}{EL} \frac{LI}{IK} = -1. \quad (20)$$

Dengan mengalikan persamaan (18), (19) dan (20) diperoleh persamaan

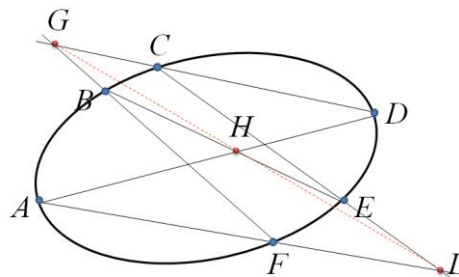
$$\frac{KG}{GJ} \frac{JH}{HL} \frac{LI}{IK} \frac{KA}{KB} \frac{KF}{KC} \frac{LB}{LD} \frac{LC}{LE} \frac{JD}{JA} \frac{JE}{JF} = -1. \quad (21)$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (17) ke persamaan (21) sehingga diperoleh

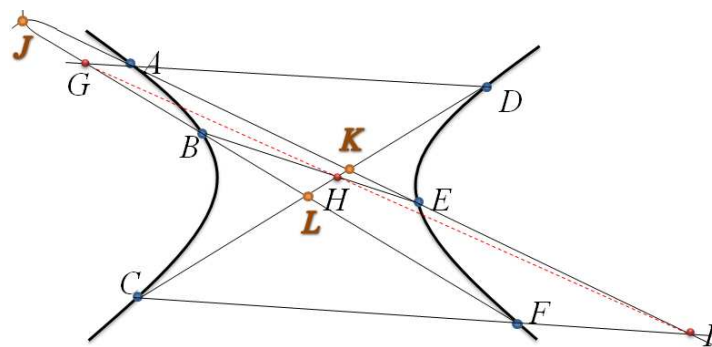
$$\frac{KG}{GJ} \frac{JH}{HL} \frac{LI}{IK} = -1. \quad (22)$$

Diperoleh persamaan (22) yang berarti titik  $G$ ,  $H$  dan  $I$  adalah segaris. ■

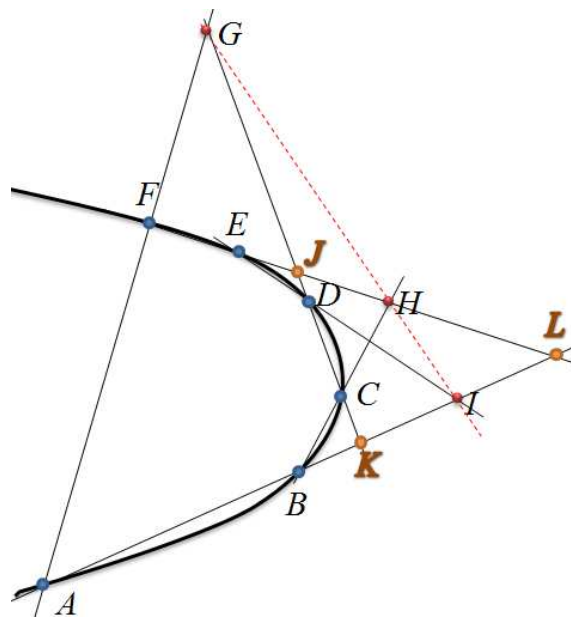
Berikut ini ditunjukkan Gambar 8, Gambar 9 dan Gambar 10 yang melukiskan Teorema Pappus pada elips, hiperbola dan parabola dengan variasi titik perpotongan berbeda.



Gambar 8: Titik  $G$  dan  $I$  berada diluar wilayah elips.



Gambar 9: Titik  $G$ ,  $H$  dan  $I$  dengan posisi terpisah.



Gambar 10: Titik  $G, H$  dan  $I$  berada diluar wilayah parabola.

Pembuktian Teorema Pappus pada elips seperti Gambar 8, Gambar 9 dan Gambar 10 sama seperti pembuktian Teorema 12 sebelumnya.

## 5. KESIMPULAN

Kesimpulan yang diperoleh dari pembahasan ini adalah Teorema Pappus terbukti berlaku pada semua irisan kerucut (lingkaran, elips, parabola dan hiperbola). Enam titik sebarang yang dihubungkan membentuk sembilan titik perpotongan, tiga titik diantaranya adalah segaris dan enam titik lainnya membentuk dua buah segitiga. Dari segitiga tersebut diperoleh persamaan-persamaan seperti pada persamaan (6), (12), (13), (14), (15) dan (16), dapat diambil kesimpulan yaitu perbandingan segmen-segmen garis penyusun titik sudut segitiga yang bersesuaian adalah satu. Selain membentuk posisi dari titik  $G, H$  dan  $I$  seperti pada Teorema 8, Teorema 9 dan Teorema 10, dengan memvariasikan penghubungan enam titik pada irisan kerucut diperoleh bentuk lain dari Teorema Pappus seperti pada Gambar 7, Gambar 8, Gambar 9, dan Gambar 10. Titik  $G, H$  dan  $I$  pada gambar-gambar tersebut juga terbukti segaris.

## 6. DAFTAR PUSTAKA

- [1] Down, Jr. F. L. 1963. *Geometry*. Addison-Wesley Publishing Company, INC. Reading.
- [2] Godfrey, C. 1908. *Modern Geometry*. University Press. Cambrige.
- [3] Mashadi. 2013. *Geometri*. Pusbangdik Universitas Riau. Pekanbaru
- [4] Richter, J. 2010. *Perspective on Projective Geometry*. Springer. Berlin.
- [5] Young, J. Y. *Projective Geometry*. The Open Court Publishing Company. Chicago.